

ΑΡΧΗ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ ΤΡΕΙΣ(3)

Θέμα 1^ο

A . α) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 3

β) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α , β]$

Μονάδες 3

γ) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α , β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (α, β)$ ώστε $f(x_0) = \eta$

Μονάδες 6,5

B . Δίνεται η συνεχής στο $x_0 = 0$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$x(f(x) - 2x + 2) = \eta x \quad , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6,5

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w έτσι ώστε $w = \frac{z - 3i}{1 + i}$

A . α) Αν $w = 2 - 2i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι

Α) 3, Β) 4, Γ) 5, Δ) 2

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση

Μονάδες 5

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

Μονάδες 7,5

B . α) Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}$$

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z

για τους οποίους ισχύει $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$

Μονάδες 6,5

ΤΕΛΟΣ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - 2x$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Να αποδείξετε ότι

α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

Μονάδες 8

β) $(f(x)e^x)' = e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

γ) Ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ